



# Learn DU

MAKE IT BIG!

*All The Best  
For Your Exams*





*Instructions:* Answer any four questions. All questions carry equal marks. Answers may be written either in English or in Hindi but the same medium should be used throughout the paper. The use of a simple non-programmable calculator is allowed. Statistical tables are attached for your reference. In all calculations, figures should be rounded to two decimal places.

निर्देश: किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दें। सभी प्रश्नों के समान अंक हैं। उत्तर अंग्रेजी या हिंदी में लिखे जा सकते हैं लेकिन पूरे पेपर में एक ही माध्यम का उपयोग किया जाना चाहिए। एक साधारण गैर-प्रोग्रामेबल कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है। सांख्यिकीय टेबल आपके संदर्भ के लिए संलग्न हैं। सभी गणनाओं में, आंकड़ों को दो दशमलव स्थानों पर गोल किया जाना चाहिए।

- Q1 i) A consignment of 7 refrigerator sets contains 5 sets with no scratch on them. A hotel makes a random purchase of 3 of the sets. If  $X$  is the number of refrigerator sets purchased with a scratch on it,
- Find the probability distribution of  $X$ .
  - Find the Cumulative Distribution Function (CDF) of  $X$ .
  - Construct a graph of the CDF.
  - Using CDF, find  $P(0 < X \leq 2)$
- ii) a) Suppose Let  $X$  denote the proportion of time in a day that a randomly selected student spends on a smart phone. Suppose the probability density function of  $X$  is

$$f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad -1 < \theta$$

A random sample of 5 students is taken with the following observation,

0.34, 0.40, 0.12, 0.55 and 0.01.

Use the method of moments to obtain an estimator of  $\theta$  and then compute the estimate of this data

- b) If  $U$  and  $V$  are two independent standard normal random variables and  $Z=0.6U+0.8V$ . Determine  $\text{Corr}(U, Z)$



- iii) On the basis of a survey of 25 random typists, a confidence interval for the mean time needed to complete typing a page was (5.588; 6.412). Knowing that the distribution of the time needed to type a page is normal, and the sample standard deviation was equal to 1, determine the confidence level used for the calculations.

Q1 i) 7 रेफ्रिजरेटर सेट के प्रेषित माल में 5 सेट होते हैं, जिन पर कोई खरोंच नहीं होती है। एक होटल 3 सेटों की एक यादृच्छिक खरीद करता है। यदि एक खरोंच के साथ खरीदे गए रेफ्रिजरेटर सेट की संख्या  $X$  है,

ए)  $X$  के प्रायिकता बंटन का पता लगाएं।

बी)  $X$  के संचयी बंटन फलन (CDF) का पता लगाएं।

सी) संचयी बंटन फलन (CDF) के एक ग्राफ का निर्माण कीजिये।

डी) संचयी बंटन फलन (CDF) का उपयोग करते हुए,  $P(0 < X \leq 2)$  खोजिये।

- ii) ए) मान लीजिए कि  $X$  एक दिन में समय के अनुपात को दर्शाता है, जो एक यादृच्छिक रूप से चयनित छात्र स्मार्ट फोन पर खर्च करता है। मान लीजिए कि  $X$  का प्रायिकता घनत्व फलन है

$$f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \quad -1 < \theta$$

5 छात्रों का यादृच्छिक नमूना निम्नलिखित अवलोकन के साथ लिया गया है,

0.34, 0.40, 0.12, 0.55, 0.01

क्षणों की विधि का उपयोग करते हुए  $\theta$  का एक अनुमानक प्राप्त करें और फिर इस डेटा के अनुमान की गणना करें।

- बी) यदि  $U$  और  $V$  दो स्वतंत्र मानक सामान्य यादृच्छिक चर हैं, और  $Z=0.6U+0.8V$  हैं, तब  $\text{Corr}(U, Z)$  निर्धारित कीजिये।

- iii) 25 यादृच्छिक टाइपिस्टों के एक सर्वेक्षण के आधार पर, एक पृष्ठ टाइप करने के लिए आवश्यक औसत समय का विश्वास अंतराल (5.588; 6.412) है। यह जानते हुए कि किसी पृष्ठ को टाइप करने के लिए आवश्यक समय का वितरण सामान्य है, और



- Q2 i) Suppose that four persons working in a factory are given the job of stamping expiry date on the packet of buns. Person A, who stamps 20% of packets, fails to stamp the expiry date once in every 200 packets. Person B who stamps 60% of packets, fails to stamp the expiry date once in every 100 packets. Person C who stamps 15% of packets, fails to stamp the expiry date once in every 90 packets and Person D who stamps 5% of packets, fails to stamp the expiry date once in every 200 packets. If a buyer complains that her packet of buns does not show the expiry date, what is the probability that,
- It was Person A who failed to stamp?
  - It was stamped by Person B or C?
  - What is the probability that a packet bought shows an expiry date and it was not stamped by B?
- ii) a) A quiz assignment of 150 questions, each question with 5 possible answers, was given to a student of which only 1 answer is correct. The student knows answers of 80 questions. What is the approximate probability that a student with no knowledge of the remaining questions, yields between 20 to 23 correct answers from his sheer guess work?
- b) Assume 50 more questions are added in the assignment. How would the answer to part (i) be affected, if the student knew the answers to all the additional questions.
- iii) It is suggested that the number of persons arriving per hour in a bank follows Poisson process and on average 5 persons arrive per hour. As a precautionary measure to avoid spread of Corona virus, suppose the bank can't allow more than 10 persons to enter in a given hour.
- What is the probability that in a given hour, the bank staff can no longer allow more persons to enter?
  - What is the probability that more than 20 persons enter the bank during a 3-hour period?
- Q2 i) मान लीजिए कि एक कारखाने में काम करने वाले चार व्यक्तियों को बन्स के पैकेट पर एक्सपायरी डेट की मुहर लगाने का काम दिया जाता है। 20% पैकेटों पर मुहर लगाने वाला व्यक्ति A, प्रत्येक 200 पैकेटों में एक बार एक्सपायरी तिथि अंकित करने में विफल रहता है। 60% पैकेटों पर मुहर लगाने वाला व्यक्ति B, प्रत्येक 100 पैकेटों में एक बार एक्सपायरी डेट की मुहर लगाने में विफल रहता है। 15% पैकेटों पर मुहर लगाने वाला व्यक्ति C, प्रत्येक 90 पैकेटों में एक बार एक्सपायरी डेट पर मुहर लगाने



में विफल रहता है और व्यक्ति D जो 5% पैकेटों पर मुहर लगाता है, वह प्रत्येक 200 पैकेटों में एक बार एक्सपायरी डेट पर मुहर लगाने में विफल रहता है। खरीदार शिकायत करता है कि उसके बन्स के पैकेट पर एक्सपायरी डेट नहीं दिखती है, तो क्या संभावना है कि,

ऐ) यह व्यक्ति A था जो मुहर लगाने में असफल रहा?

बी) इस पर व्यक्ति बी या सी ने मुहर लगाई थी?

सी) क्या संभावना है कि खरीदा गया एक पैकेट एक्सपायरी डेट दिखाता है और उस पर B द्वारा मुहर नहीं लगाई गई थी?

ii) ऐ) एक छात्र को 150 प्रश्नों का एक प्रश्नोत्तरी असाइनमेंट दिया जाता है जिसमें, प्रत्येक प्रश्न के 5 संभावित उत्तर हैं, जिनमें से केवल 1 उत्तर सही है। छात्र 80 प्रश्नों के उत्तर जानता है। अनुमानित संभावना क्या है कि, एक छात्र जिसके पास शेष प्रश्नों का ज्ञान नहीं है, वह अपने सीधे अनुमान से 20 से 23 के बीच सही उत्तर देता है?

बी) मान लीजिये कि असाइनमेंट में 50 और प्रश्न जोड़े गए हैं, भाग (ऐ) का उत्तर कैसे प्रभावित होगा, यदि छात्र सभी अतिरिक्त प्रश्नों के उत्तर जानता है।

iii) यह सुझाव दिया गया है कि एक बैंक में प्रति घंटे आने वाले व्यक्तियों की संख्या पॉइसन प्रक्रिया का अनुसरण करती है और औसतन 5 व्यक्ति प्रति घंटे बैंक में आते हैं। कोरोना वायरस के प्रसार से बचने के लिए एहतियाती उपाय के रूप में, मान लीजिए कि बैंक एक निश्चित समय में 10 से अधिक व्यक्तियों को प्रवेश करने की अनुमति नहीं दे सकता है।

ऐ) क्या संभावना है कि दिए गए घंटे में, बैंक कर्मचारी अब अधिक व्यक्तियों को प्रवेश करने की अनुमति नहीं दे सकता है?

बी) क्या संभावना है कि 3 घंटे की अवधि के दौरान 20 से अधिक व्यक्ति बैंक में प्रवेश करते हैं?

Q3 i) The joint probability distribution of two discrete random variables X and Y is given as,

p(x,y)	x			
		1	2	3
y	1	0.1	0.2	0.1
	2	0.15	0	0.15
	3	0.25	0.05	0

- Construct the marginal distribution of X and Y.
- Are X and Y variables independent?
- Find  $E(-2XY)$
- Find  $E(Y/X=2)$ .
- Find correlation coefficient between X and Y.

ii) The density function of a random variable X is given as,

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- Calculate  $P(X \leq 1/3)$ .
  - What is probability that X will exceed 0.5?
  - Given that  $X \geq 0.5$ , what is probability that X will be less than 0.75?
- iii) What is the probability that the owner of the Hotel Bar does not allow the two minors to enter, if he randomly checks the identity cards of 5 students from among 9 students of which only 5 are of eligible age.

Q3 i) दो असतत यादृच्छिक चर X और Y का संयुक्त संभाव्यता वितरण निम्नानुसार है,

p(x,y)	x			
		1	2	3
y	1	0.1	0.2	0.1
	2	0.15	0	0.15
	3	0.25	0.05	0

ए) X और Y के सीमांत वितरण का निर्माण कीजिये।

बी) क्या X और Y चर स्वतंत्र हैं?

सी)  $E(-2XY)$  का ज्ञात कीजिये ।

डी)  $E(Y/X=2)$  का ज्ञात कीजिये ।

ई)  $X$  और  $Y$  के बीच सहसंबंध गुणांक का ज्ञात कीजिये।



ii) एक यादृच्छिक चर  $X$  का घनत्व कार्य निम्नानुसार दिया गया है,

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

ए) गणना कीजिये  $P(X \leq 1/3)$ ।

बी) क्या संभावना है कि  $X$  0.5 से अधिक होगा?

सी) अगर यह दिया हुआ है कि  $X \geq 0.5$ , क्या संभावना है कि  $X$  0.75 से कम होगा?

iii) क्या संभावना है कि होटल बार का मालिक दो नाबालिगों को प्रवेश करने की अनुमति नहीं देता है, अगर वह 9 छात्रों में से 5 छात्रों के पहचान पत्र को यादृच्छिक रूप से जांचता है, जिनमें से केवल 5 उपयुक्त आयु के हैं।

Q4 i) To check the effectiveness of two brands of refrigerators, time taken for ice cubes to be formed from water in the freezer was compared. Two independent experiments based on 15 refrigerators of each brand were performed and time taken in formation of ice cubes was recorded. Suppose the population variance for both brands is 1.0 hour. Assuming normal distribution and mean time for both brands is equal to 20 hours, find the,

- a) Probability that the average time taken by brand A ( $\bar{X}_A$ ) is higher than average time taken by B brand ( $\bar{X}_B$ ) is at least 1.0 hour.
- b) Probability that  $\bar{X}_A$  will deviate from  $\bar{X}_B$  by at least 45 minutes.
- c) How would your answer change if the underlying distribution was not normal?

ii) Find a maximum likelihood estimator of  $\mu$  for a random sample of  $X_1, X_2, \dots, X_n$  taken from a Poisson distribution. Clearly write all the steps.

iii) a) If  $X$  is distributed as normal with  $\mu = 40$  and  $\sigma^2 = 4$ , compute three values of the random variable  $X$  that divide the distribution in four equal parts.

b) Find  $k$  such that  $P(k < T < -1.729) = 0.049$  for a random sample of size 20 taken from a normal distribution with  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ .



learndu.in

Q4 i) दो ब्रांडों के रेफ्रिजरेटर की प्रभावशीलता की जांच करने के लिए, फ्रीजर में पानी से बर्फ के टुकड़े बनाने के लिए लगने वाले समय की तुलना की गई है। प्रत्येक ब्रांड के 15 रेफ्रिजरेटर पर आधारित दो स्वतंत्र प्रयोगों का प्रदर्शन किया गया और बर्फ के टुकड़ों के निर्माण में लगने वाले समय को अभिलिखित किया गया। मान लीजिए दोनों ब्रांडों के लिए समष्टि प्रसरण 1.0 घंटे हैं। मान लीजिए दोनों ब्रांडों के लिए सामान्य वितरण और औसत समय 20 घंटे के बराबर है, ज्ञात कीजिये,

ऐ) क्या संभावना है कि ब्रांड A द्वारा लिया गया औसत समय  $(\bar{X}_A)$ , ब्रांड B द्वारा लिए गए औसत समय  $(\bar{X}_B)$  से, कम से कम 1.0 घंटे उच्चतम हैं।

बी) क्या संभावना है कि  $(\bar{X}_A)$  कम से कम 45 मिनट  $(\bar{X}_B)$ , से विचलन करेगा।

सी) यदि अंतर्निहित वितरण सामान्य नहीं है तो आपका उत्तर कैसे बदलेगा?

ii)  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , के एक पॉइसन वितरण से लिए गए यादृच्छिक नमूने के लिए  $\mu$  का अधिकतम संभावना अनुमानक ज्ञात कीजिये, सभी चरणों को स्पष्ट रूप से लिखिए।

iii) ऐ) यदि  $X$  को  $\mu=40$  और  $\sigma^2=4$  के साथ सामान्य रूप से वितरित किया जाता है, तो यादृच्छिक चर  $X$  के तीन मानों की गणना कीजिये जो वितरण को चार समान भागों में विभाजित करते हैं।

बी) एक सामान्य वितरण से 20 के आकार के यादृच्छिक नमूने को लिया गया है, तो  $P(k < T < -1.729) = 0.049$  के लिए  $K$  का ज्ञात कीजिये जब  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$  हैं।

Q5 i) Consider a random sample  $X_1, X_2, \dots, X_{30}$  of size 30, drawn from a normal distribution with  $\mu = 30$ , find maximum likelihood estimator of the population variance  $\sigma^2$ .

- Is the maximum likelihood estimator obtained in part (i) biased? Justify your answer.
- If the observed sample is 3, 6, 2, 0, 4, 3; compute the MLE of  $\sigma^2$ .
- How would your answer in part (i) be affected if the number of observations remains 30 and  $\mu$  is reduced to zero?



ii) Suppose a test procedure about the population mean  $\mu$  is performed, when the population is normal and the sample size is 10. If the alternative hypothesis is:



a)  $H_a: \mu < \mu_0$ , what is the rejection region for the test at 5% level of significance, if the population standard deviation is known? Show diagrammatically.

b)  $H_a: \mu \neq \mu_0$ , what is the rejection region for the test at 2% level of significance, if the population standard deviation is unknown? Show diagrammatically.

c) If the sample of 10 observations gave a mean of 20 and a standard deviation of 2, conduct the test in part (ii), given that  $\mu_0 = 21$ .

iii) a) A paediatrician wants to estimate the mean weight of firstborn babies which is normally distributed. The standard deviation of weight for all firstborn babies is 1.15 kg. If she wants to be 94% sure that the mean weight of firstborns differs from their sample mean by no more than 0.25 kgs, what should be the size of the sample?

b) For a given sample size, why is a 90% confidence interval smaller than 99%. Wouldn't it always be desirable to reduce the interval width in this manner?

Q5 i) एक 30 के आकार के यादृच्छिक नमूने  $X_1, X_2, \dots, X_{30}$ , पर विचार कीजिये, जो  $\mu = 30$  के साथ एक सामान्य वितरण से खींचा गया है, समष्टि प्रसरण  $\sigma^2$  का अधिकतम संभावना अनुमानक ज्ञात कीजिये।

ऐ) क्या भाग (i) में प्राप्त हुआ अधिकतम संभावना अनुमानक पक्षपाती है? अपने जवाब का औचित्य साबित कीजिये।

बी) यदि देखा गया नमूना 3, 6, 2, 0, 4, 3 है, तो  $\sigma^2$  के MLE की गणना कीजिये।

ग) यदि टिप्पणियों की संख्या 30 और  $\mu$  शून्य तक कम हो जाता है, तो आपका उत्तर भाग (i) में कैसे प्रभावित होगा?

ii) मान लीजिए कि जनसंख्या औसत  $\mu$  के बारे में परीक्षण प्रक्रिया का प्रदर्शन किया जाता है, जब जनसंख्या सामान्य है और नमूना आकार 10 है। यदि वैकल्पिक परिकल्पना है:

ऐ)  $H_a: \mu < \mu_0$ , तो 5% के स्तर पर परीक्षण के लिए अस्वीकृति क्षेत्र क्या है अगर जनसंख्या मानक विचलन ज्ञात है? आकृति द्वारा दिखाएं।

बी)  $H_a: \mu \neq \mu_0$ , तो 2% के स्तर पर परीक्षण के लिए अस्वीकृति क्षेत्र क्या है

अगर जनसंख्या मानक विचलन ज्ञात नहीं है? आकृति द्वारा दिखाएं।



learndu.in

सी) यदि 10 अवलोकनों के नमूने में 20 का औसत दिया जाता है और 2 का मानक विचलन होता है, तो भाग (ii) का परीक्षण करें, यह देखते हुए कि  $\mu_0 = 21$  है।

iii) ऐ) एक बाल रोग विशेषज्ञ सभी पहली जन्मी संतान के औसत वजन का अनुमान लगाना चाहता है। सभी पहली जन्मी संतान के वजन का मानक विचलन 1.15 किलोग्राम है। अगर वह 94% सुनिश्चित होना चाहती है कि पहली जन्मी संतान का औसत वजन और नमूना औसत का अंतर 0.25 किलोग्राम से अधिक नहीं है, तो नमूने का आकार क्या होना चाहिए?

बी) दिए गए नमूने के आकार के लिए, 90% अंतराल 99% अंतराल से कम क्यों है। क्या इस तरह से अंतराल की चौड़ाई को कम करना हमेशा वांछनीय नहीं होगा?

- Q6 i) A chief financial officer (CFO) of a large company claims that the employees of his company have an average earning ( $\mu$ ) of more than ₹ 2100 per month. To test the claim, Mr. Jack took a sample of 64 employees and found the sample average income of ₹2135 with standard deviation equal to ₹ 1360.
- State the appropriate null and alternative hypotheses.
  - Based on the sample information, with  $\alpha = 2.5\%$ , test the hypothesis stated in part (a). What conclusion do you draw? Use p-value approach.
  - Would your conclusion in part (b) remain unchanged if  $\alpha = 1\%$ , is used instead.
  - Calculate type II error ( $\beta$ ) in part (b), for true  $\mu = ₹2150$ . Show diagrammatically.
  - If the claim of CFO is that the employees of his company have an average earning of ₹ 2100 per month, how would you test this claim using p value approach, with  $\alpha = 2.5\%$ .
- (ii) a) 36 out of 100 persons interviewed are familiar with the tax incentives given by the government for installing solar panels, construct a 96 % traditional confidence interval for the corresponding true proportion.
- The average wages of 25 employees of a company are ₹ 2500 with a standard deviation of ₹ 250. Assuming wages to be normally distributed, calculate 98% confidence upper bound for the average wages and interpret it.



# Join Us For University Updates



learndu.in



learndu.in



Learn\_DU



Learn DU

